毕达哥拉斯犹豫模糊集成算子及其决策应用 *

何　霞†，刘卫锋，杜迎雪

(郑州航空工业管理学院 数学学院，郑州 450046)

摘　要：针对毕达哥拉斯犹豫模糊多属性决策中，集成算子的重要作用以及集成算子不完善的情况，较为系统地研究了毕达哥拉斯犹豫模糊集成算子。为此，在毕达哥拉斯模糊数的运算和运算法则基础上，定义了毕达哥拉斯犹豫模糊有序加权平均算子(PHFOWA)、广义有序加权平均算子(GPHFOWA)和混合平均算子(PHFHA)，以及毕达哥拉斯犹豫模糊有序加权几何平均算子(PHFOWG)、广义有序加权几何平均算子(GPHFOWG)和混合几何平均算子(PHFHG)，并结合数学归纳法，分别给出了它们的计算公式，讨论了它们的有界性、单调性和置换不变性等性质。建立了基于毕达哥拉斯犹豫模糊集成算子的多属性决策方法，并应用算例和相关方法比较说明了决策方法的可行性与有效性。

关键词：毕达哥拉斯犹豫模糊集；毕达哥拉斯犹豫模糊数；集成算子；决策

中图分类号：O223　　doi: 10.19734/j.issn.1001-3695.2019.02.0044

Pythagorean hesitant fuzzy aggregation operators and their applications in decision making

He Xia†, Liu Weifeng, Du Yingxue

(*School of Mathematics, Zhengzhou University of Aeronautics, Zhengzhou* 450046, *China*)

Abstract: Pythagorean hesitant fuzzy set as a new generalization of Pythagorean fuzzy and hesitant fuzzy set can handle fuzzy information more flexibly in multiple attribute decision making. In view of the important role of aggregation operator in multiple attribute decision making and under the condition of the imperfect aggregation operator in Pythagorean hesitant fuzzy decision environment, Pythagorean hesitant fuzzy aggregation operators are systematically investigated. Some Pythagorean hesitant fuzzy aggregation operators are defined based on the operational laws of Pythagorean hesitant fuzzy numbers, including Pythagorean hesitant fuzzy ordered weighted average operator (PHFOWA) , generalized ordered weighted average operator(GPHFOWA) , hybrid average operator(PHFHA) , Pythagorean hesitant fuzzy ordered weighted geometric average operator (PHFOWG) , generalized ordered weighted geometric average operator(GPHFOWG) and hybrid geometric average operator (PHFHG) . The mathematical expression of these operators are obtained by derivation and some desirable properties such as boundedness, nonotonicity and commutativity are discussed in detail. Finally, a decision making method based on Pythagorean hesitant fuzzy aggregation operators is given, and an applied example is used to illustrate the feasibility and applicability of the proposed method.

Key words: Pythagorean hesitant fuzzy set; Pythagorean hesitant fuzzy number; aggregation operator; decision making

0　引言

作为模糊集[1]的一种有效推广，由于直觉模糊集[2]能同时考虑元素属于集合的隶属度和非隶属度，故而能够从支持、反对和中立三方面描述客观世界的模糊本质，因此其受到了决策研究者的广泛关注，并取得了丰硕的成果[3~15]，涉及直觉模糊集的各种运算[3, 4]，直觉模糊信息集成算子[5~11]，直觉模糊聚类[12]，直觉模糊集的相关系数[13~15]。但是，直觉模糊集在多属性决策应用中也存在一定的局限性，比如，其仅能描述隶属度和非隶属度之和超过 1 的模糊现象，但其对隶属度和非隶属度之和不超过 1 的现象无能为力，为此 Yager 提出了毕达哥拉斯模糊集[16, 17]，从而解决了上述问题。在 Yager 研究基础上，许多学者对毕达哥拉斯模糊集展开了研究，并取得了一些研究成果，其中，Zhang 等人[18]研究了毕达哥拉斯模糊 TOPSIS 法；Gou 等人[19]研究了毕达哥拉斯模糊数的连续性及微分等；Peng 等人[20]研究了区间值毕达哥拉斯模糊集及决策应用；刘卫锋等人[21,22]研究了毕达哥拉斯模糊加权平均算子和加权几何平均算子以及考虑隶属度和非隶属度交叉的平均算子；何霞等人[23]研究了毕达哥拉斯模糊幂平均算子；Garg[24, 25]研究了毕达哥拉斯模糊数的 Einstein 运算及运算性质，提出了毕达哥拉斯模糊 Einstein 集成算子；Wu 等人[26]和刘卫锋等人[27]研究了毕达哥拉斯模糊 Hamacher 运算及其决策应用；Peng 等人[28]研究了基于 MABAC 方法的毕达哥拉斯模糊 Choquet 积分算子及其决策应用；李德清等人[29]定义了毕达哥拉斯模糊集的距离测度；Garg[30]研究了毕达哥拉斯模糊集的相关系数；张超等人[31]研究了毕达哥拉斯粗糙模糊集；彭新东等人[32,33]提出了毕达哥拉斯模糊软集和毕达哥拉斯模糊语言集；刘卫锋等人[34]将毕达哥拉斯模糊集和犹豫模糊集[35]相结合,定义了毕达哥拉斯犹豫模糊集；Liang 等[36]提出了毕达哥拉斯犹豫模糊 TOPSIS 方法；刘卫锋等人[37]研究了毕达哥拉斯犹豫模糊集的相关系数；Ma 等人[38]研究了对称毕达哥拉斯模糊加权几何/平均算子，Liang 等人[39]构建了毕达哥拉斯模糊集的投影模型，Xue 等人[40]提出了毕达哥拉斯模糊 LINMAP 方法，Ren 等人[41]提出了毕达哥拉斯模糊 TODIM 方法，Wan 等人[42]研究了毕达哥拉斯模糊数学规划及其群决策应用。显然，目前关于毕达哥拉斯模糊集的研

收稿日期：2019-02-22；**修回日期：**2019-05-17　**基金项目：**国家自然科学基金资助项目(11501525)；河南省杰出青年基金项目(2018JQ0004)；河南省高等学校重点科研项目(18A110032)

作者简介：何霞(1976-)，女，河南太康人，副教授，硕士，主要研究方向为决策理论与方法(hexia0723@163.com)；刘卫锋(1976-)，男，河南沈丘人，副教授，硕士，主要研究方向为模糊数学；杜迎雪(1979-)，女，河南许昌人，讲师，硕士，主要研究方向为决策理论与方法.

究主要集中在决策领域，涉及集成算子、经典决策方法推广、距离测度、相关测度、毕达哥拉斯模糊集与其他集合的结合等。

毕达哥拉斯犹豫模糊集将将毕达哥拉斯模糊集和犹豫模糊集相结合，兼具二者共同优点，不仅可以描述隶属度和非隶属度之和超过 1 而其平方和不超过 1 的模糊现象，而且能体现决策者在隶属度和非隶属度的犹豫不决，因此其在多属性决策中更具有优势。但是，目前毕达哥拉斯犹豫模糊集的研究还没有引起决策领域研究者的足够重视，研究内容仅涉及集成算子[34]、TOPSIS 方法[36]和相关测度[37]。考虑到集成算子在多属性决策中具有极其重要的地位，故本文将对毕达哥拉斯犹豫模糊集成算子进行较为系统地研究。为此，将研究内容安排如下：第 1 部分，回顾直觉模糊集、毕达哥拉斯模糊集、毕达哥拉斯犹豫模糊集等概念。第 2 部分，定义了毕达哥拉斯犹豫模糊有序加权平均算子、广义毕达哥拉斯犹豫模糊有序加权平均算子和毕达哥拉斯犹豫模糊混合平均算子，推导出它们的计算公式，讨论了它们的性质。第 3 部分，提出了毕达哥拉斯犹豫模糊有序加权几何平均算子、广义毕达哥拉斯犹豫模糊有序加权几何平均算子和毕达哥拉斯犹豫模糊混合几何平均算子，给出它们的计算公式，研究了它们的性质。第 4 部分，提出了基于毕达哥拉斯犹豫模糊信息集成算子的多属性决策方法，并通过决策实例说明其可行性。第 5 部分，对研究内容进行总结。

1　基本概念

定义 1[2]　设 X 为论域，称三元组 $A=\{<x,\mu_A(x),\ \nu_A(x)>|x\in X\}$ 为直觉模糊集，其中 $\mu_A(x),\nu_A(x)$ 分别表示元素 x 属于 A 的隶属度和非隶属度，且 $\forall x\in X$，$\mu_A(x),\nu_A(x)\in[0,1]$，$\mu_A(x)+\nu_A(x)\le 1$。

定义 2[16,17]　设 X 为论域，则称三元组 $A=\{<x,\mu_A(x),\ \nu_A(x)>|x\in X\}$ 为毕达哥拉斯模糊集，其中 $\mu_A(x),\nu_A(x)$ 分别表示元素 x 属于 A 的隶属度和非隶属度，且 $\forall x\in X$，$\mu_A(x),\nu_A(x)\in[0,1]$，$\mu_A^2(x)+\nu_A^2(x)\le 1$。

定义 3[35]　设 X 为论域，$A=\{<x,h_A(x)>|x\in X\}$ 称为 X 上的一个犹豫模糊集，其中 $h_A(x)$ 表示 X 上元素 x 属于 A 的所有可能隶属度组成的集合。

定义 4[34]　设 X 为论域，则称三元组 $A=\{<x,\Gamma_A(x),\ \Psi_A(x)>|x\in X\}$ 为毕达哥拉斯犹豫模糊集，其中 $\Gamma_A(x),\Psi_A(x)$ 为 $[0,1]$ 的非空有限子集，分别表示元素 x 属于 A 的可能隶属度和可能非隶属度，且 $\forall x\in X$，$\forall\mu_A(x)\in\Gamma_A(x),\forall\nu_A(x)\in\Psi_A(x)$，使得 $\mu_A^2(x)+\nu_A^2(x)\le 1$。

称 $<\Gamma_A(x),\Psi_A(x)>$ 为毕达哥拉斯犹豫模糊数，为方便起见，将毕达哥拉斯犹豫模糊数记作 $\alpha=<\Gamma_\alpha,\Psi_\alpha>$。全体毕达哥拉斯犹豫模糊数记作 $PHFN$。

定义 5[34]　设 $\alpha=<\Gamma_\alpha,\Psi_\alpha>\in PHFN$，称 $s(\alpha)=\frac{1}{|\Gamma_\alpha|}\sum_{\mu\in\Gamma_\alpha}\mu^2-\frac{1}{|\Psi_\alpha|}\sum_{\nu\in\Psi_\alpha}\nu^2$ 为 α 的得分函数，其中 $|\Gamma_\alpha|,|\Psi_\alpha|$ 分别表示集合 $\Gamma_\alpha,\Psi_\alpha$ 的基数。

定义 6[34]　设 $\alpha_i=<\Gamma_{\alpha_i},\Psi_{\alpha_i}>\in PHFN(i=1,2)$，

a) 若 $s(\alpha_1)>s(\alpha_2)$，则称 α_1 大于 α_2，记作 $\alpha_1\succ\alpha_2$；

b) 若 $s(\alpha_1)=s(\alpha_2)$，则称 α_1 等于 α_2，记作 $\alpha_1=\alpha_2$；

c) 若 $s(\alpha_1)<s(\alpha_2)$，则称 α_1 小于 α_2，记作 $\alpha_1\prec\alpha_2$。

定义 7[34]　设 $\alpha=<\Gamma_\alpha,\Psi_\alpha>\in PHFN,\quad \alpha_i=<\Gamma_{\alpha_i},\Psi_{\alpha_i}>\in PHFN$ $(i=1,2)$，$\lambda>0$，则定义

a) $\alpha_1\oplus\alpha_2=<\bigcup_{\substack{\mu_{\alpha_1}\in\Gamma_{\alpha_1}\\ \mu_{\alpha_2}\in\Gamma_{\alpha_2}}}\{\sqrt{\mu_{\alpha_1}^2+\mu_{\alpha_2}^2-\mu_{\alpha_1}^2\mu_{\alpha_2}^2}\},\bigcup_{\substack{\nu_{\alpha_1}\in\Psi_{\alpha_1}\\ \nu_{\alpha_2}\in\Psi_{\alpha_2}}}\{\nu_{\alpha_1}\nu_{\alpha_2}\}>$；

b) $\alpha_1\otimes\alpha_2=<\bigcup_{\substack{\mu_{\alpha_1}\in\Gamma_{\alpha_1}\\ \mu_{\alpha_2}\in\Gamma_{\alpha_2}}}\{\mu_{\alpha_1}\mu_{\alpha_2}\},\bigcup_{\substack{\nu_{\alpha_1}\in\Gamma_{\alpha_1}\\ \nu_{\alpha_2}\in\Gamma_{\alpha_2}}}\{\sqrt{\nu_{\alpha_1}^2+\nu_{\alpha_2}^2-\nu_{\alpha_1}^2\nu_{\alpha_2}^2}\}>$；

c) $\lambda\alpha=<\bigcup_{\mu_\alpha\in\Gamma_\alpha}\{\sqrt{1-(1-\mu_\alpha^2)^\lambda}\},\bigcup_{\nu_\alpha\in\Psi_\alpha}\{\nu_\alpha^\lambda\}>$；

d) $\alpha^\lambda=<\bigcup_{\mu_\alpha\in\Gamma_\alpha}\{\mu_\alpha^\lambda\},\bigcup_{\nu_\alpha\in\Psi_\alpha}\{\sqrt{1-(1-\nu_\alpha^2)^\lambda}\}>$。

2　毕达哥拉斯犹豫模糊平均算子

定义 8　设 $\alpha_i=<\Gamma_{\alpha_i},\Psi_{\alpha_i}>\in PHFN\ (i=1,2,\cdots,n)$，若

$$PHFOWA:PHFN^n\to PHFN,\ PHFOWA(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\mathop{\oplus}_{i=1}^{n}\omega_i\alpha_{\sigma(i)}$$

则称 $PHFOWA$ 为毕达哥拉斯犹豫模糊有序加权平均算子，简记为 $PHFOWA$ 算子，其中 $(\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(n))$ 是 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个置换，且满足 $\alpha_{\sigma(1)}\ge\alpha_{\sigma(2)}\ge\cdots\ge\alpha_{\sigma(n)}$，$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^T$ 是与 $PHFOWA$ 算子相关联的位置权重向量，且 $\omega_i\ge 0,i=1,2,\cdots,n,\sum_{i=1}^n\omega_i=1$。

定理 1　设 $\alpha_i=<\Gamma_{\alpha_i},\Psi_{\alpha_i}>\in PHFN$，$(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$PHFOWA(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=$$
$$<\bigcup_{\mu_{\alpha_{\sigma(i)}}\in\Gamma_{\alpha_{\sigma(i)}}}\{\sqrt{1-\prod_{i=1}^n(1-\mu_{\alpha_{\sigma(i)}}^2)^{\omega_i}}\},\bigcup_{\nu_{\alpha_{\sigma(i)}}\in\Psi_{\alpha_{\sigma(i)}}}\{\prod_{i=1}^n\nu_{\alpha_{\sigma(i)}}^{\omega_i}\}>$$

其中，$(\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(n))$ 是 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个置换，且满足 $\alpha_{\sigma(1)}\ge\alpha_{\sigma(2)}\ge\cdots\ge\alpha_{\sigma(n)}$，$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^T$ 是与 $PHFOWA$ 算子相关联的位置权重向量，且 $\omega_i\ge 0,i=1,2,\cdots,n,\sum_{i=1}^n\omega_i=1$。

证明　当 $n=2$ 时，

$$PHFOWA(\alpha_1,\alpha_2)=\omega_1\alpha_1\oplus\omega_2\alpha_2=$$
$$<\bigcup_{\mu_{\alpha_{\sigma(1)}}\in\Gamma_{\alpha_{\sigma(1)}}}\{\sqrt{1-(1-\mu_{\alpha_{\sigma(1)}}^2)^{\omega_1}}\},\bigcup_{\nu_{\alpha_{\sigma(1)}}\in\Psi_{\alpha_{\sigma(1)}}}\{\nu_{\alpha_{\sigma(1)}}^{\omega_1}\}>\oplus$$
$$<\bigcup_{\mu_{\alpha_{\sigma(2)}}\in\Gamma_{\alpha_{\sigma(2)}}}\{\sqrt{1-(1-\mu_{\alpha_{\sigma(2)}}^2)^{\omega_2}}\},\bigcup_{\nu_{\alpha_{\sigma(2)}}\in\Psi_{\alpha_{\sigma(2)}}}\{\nu_{\alpha_{\sigma(2)}}^{\omega_2}\}>=$$
$$<\bigcup_{\mu_{\alpha_{\sigma(i)}}\in\Gamma_{\alpha_{\sigma(i)}}}\{\sqrt{1-\prod_{i=1}^2(1-\mu_{\alpha_{\sigma(i)}}^2)^{\omega_i}}\},\bigcup_{\nu_{\alpha_{\sigma(i)}}\in\Psi_{\alpha_{\sigma(i)}}}\{\prod_{i=1}^2\nu_{\alpha_{\sigma(i)}}^{\omega_i}\}>$$

假设 $n=k$ 时，

$$PHFOWA(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)=$$
$$<\bigcup_{\mu_{\alpha_{\sigma(i)}}\in\Gamma_{\alpha_{\sigma(i)}}}\{\sqrt{1-\prod_{i=1}^k(1-\mu_{\alpha_{\sigma(i)}}^2)^{\omega_i}}\},\bigcup_{\nu_{\alpha_{\sigma(i)}}\in\Psi_{\alpha_{\sigma(i)}}}\{\prod_{i=1}^k\nu_{\alpha_{\sigma(i)}}^{\omega_i}\}>$$

成立。

则当 $n=k+1$ 时，

$$PHFOWA(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{k+1})=$$
$$(\omega_1\alpha_{\sigma(1)}\oplus\omega_2\alpha_{\sigma(2)}\oplus\cdots\oplus\omega_{k+1}\alpha_{\sigma(k+1)})=$$
$$(\omega_1\alpha_{\sigma(1)}\oplus\omega_2\alpha_{\sigma(2)}\oplus\cdots\oplus\omega_k\alpha_{\sigma(k)})\oplus\omega_{k+1}\alpha_{\sigma(k+1)}=$$
$$<\bigcup_{\mu_{\alpha_{\sigma(i)}}\in\Gamma_{\alpha_{\sigma(i)}}}\{\sqrt{1-\prod_{i=1}^k(1-\mu_{\alpha_{\sigma(i)}}^2)^{\omega_i}}\},\bigcup_{\nu_{\alpha_{\sigma(i)}}\in\Psi_{\alpha_{\sigma(i)}}}\{\prod_{i=1}^k\nu_{\alpha_{\sigma(i)}}^{\omega_i}\}>\oplus$$
$$<\bigcup_{\mu_{\alpha_{\sigma(k+1)}}\in\Gamma_{\alpha_{\sigma(k+1)}}}\{\sqrt{1-(1-\mu_{\alpha_{\sigma(k+1)}}^2)^{\omega_{k+1}}}\},\bigcup_{\nu_{\alpha_{\sigma(k+1)}}\in\Psi_{\alpha_{\sigma(k+1)}}}\{\nu_{\alpha_{\sigma(k+1)}}^{\omega_{k+1}}\}>=$$
$$<\bigcup_{\mu_{\alpha_{\sigma(i)}}\in\Gamma_{\alpha_{\sigma(i)}}}\{\sqrt{1-\prod_{i=1}^{k+1}(1-\mu_{\alpha_{\sigma(i)}}^2)^{\omega_i}}\},\bigcup_{\nu_{\alpha_{\sigma(i)}}\in\Psi_{\alpha_{\sigma(i)}}}\{\prod_{i=1}^{k+1}\nu_{\alpha_{\sigma(i)}}^{\omega_i}\}>$$

由数学归纳法可知，定理 1 成立。

定理 2　有界性。设 $\alpha_i=<\Gamma_{\alpha_i},\Psi_{\alpha_i}>\in PHFN$，$(i=1,2,\cdots,n)$ $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^T$ 是与 $PHFOWA$ 算子相关联的位置权重向量，且 $\omega_i\ge 0,i=1,2,\cdots,n,\quad\sum_{i=1}^n\omega_i=1$。令 $\alpha^-=<\mu^-,\nu^+>,\alpha^+=<\mu^+,\nu^->$，其中，$\mu^-=\min\{\mu\in\Gamma_{\alpha_i}\,|\,i=1,2,\cdots,n\}$，$\mu^+=\max\{\mu\in\Gamma_{\alpha_i}\,|\,i=1,2,\cdots,n\}$，$\nu^-=\min\{\nu\in\Psi_{\alpha_i}\,|\,i=1,2,\cdots,n\}$，$\nu^+=\max\{\nu\in\Psi_{\alpha_i}\,|\,i=1,2,\cdots,n\}$。则 $\alpha^-\le PHFOWA(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\le\alpha^+$。

证明　设 $\alpha=PHFOWA(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则

$$s_\alpha=\frac{1}{|\Gamma_\alpha|}\sum_{\Gamma_\alpha}(1-\prod_{i=1}^n(1-\mu_{\alpha_{\sigma(i)}}^2)^{\omega_i})-\frac{1}{|\Psi_\alpha|}\sum_{\Psi_\alpha}(\prod_{i=1}^n\nu_{\alpha_{\sigma(i)}}^{\omega_i})^2。$$

由于 $\mu^-\le\mu_{\alpha_{\sigma(i)}}\le\mu^+$，则 $(\mu^-)^2\le\mu_{\alpha_{\sigma(i)}}^2\le(\mu^+)^2$，于是

$$(1-(\mu^-)^2)^{\omega_i}\ge(1-\mu_{\alpha_{\sigma(i)}}^2)^{\omega_i}\ge(1-(\mu^+)^2)^{\omega_i}$$

即有 $1-\prod\limits_{i=1}^{n}(1-(\mu^{-})^{2})^{\omega_i} \le 1-\prod\limits_{i=1}^{n}(1-\mu^{2}_{\alpha_{\sigma(i)}})^{\omega_i} \le 1-\prod\limits_{i=1}^{n}(1-(\mu^{+})^{2})^{\omega_i}$ ，

故可得 $$(\mu^{-})^{2} \le 1-\prod_{i=1}^{n}(1-\mu^{2}_{\alpha_{\sigma(i)}})^{\omega_i} \le (\mu^{+})^{2},$$

所以 $$\sum_{\Gamma_\alpha}(\mu^{-})^{2} \le \sum_{\Gamma_\alpha}(1-\prod_{i=1}^{n}(1-\mu^{2}_{\alpha_{\sigma(i)}})^{\omega_i}) \le \sum_{\Gamma_\alpha}(\mu^{+})^{2},$$

即有 $$|\Gamma_\alpha|(\mu^{-})^{2} \le \sum_{\Gamma_\alpha}(1-\prod_{i=1}^{n}(1-\mu^{2}_{\alpha_{\sigma(i)}})^{\omega_i}) \le |\Gamma_\alpha|(\mu^{+})^{2},$$

所以 $$(\mu^{-})^{2} \le \frac{1}{|\Gamma_\alpha|}\sum_{\Gamma_\alpha}(1-\prod_{i=1}^{n}(1-\mu^{2}_{\alpha_{\sigma(i)}})^{\omega_i}) \le (\mu^{+})^{2}。$$

由 $\nu^{-} \le \nu_{\alpha_{\sigma(i)}} \le \nu^{+}$ ，可得 $(\nu^{-})^{\omega_i} \le \nu^{\omega_i}_{\alpha_{\sigma(i)}} \le (\nu^{+})^{\omega_i}$ ，继而有 $\prod\limits_{i=1}^{n}(\nu^{-})^{\omega_i} \le \prod\limits_{i=1}^{n}\nu^{\omega_i}_{\alpha_{\sigma(i)}} \le \prod\limits_{i=1}^{n}(\nu^{+})^{\omega_i}$ ，于是有 $\nu^{-} \le \prod\limits_{i=1}^{n}\nu^{\omega_i}_{\alpha_{\sigma(i)}} \le \nu^{+}$ ，从而 $\sum\limits_{\Psi_\alpha}(\nu^{-})^{2} \le \sum\limits_{\Psi_\alpha}(\prod\limits_{i=1}^{n}(\nu^{\omega_i}_{\alpha_{\sigma(i)}})^{2}) \le \sum\limits_{\Psi_\alpha}(\nu^{+})^{2}$ ，

即有 $$(\nu^{-})^{2}|\Psi_\alpha| \le \sum_{\Psi_\alpha}(\prod_{i=1}^{n}(\nu^{\omega_i}_{\alpha_{\sigma(i)}})^{2}) \le (\nu^{+})^{2}|\Psi_\alpha|,$$

即得 $$(\nu^{-})^{2} \le \frac{1}{|\Psi_\alpha|}\sum_{\Psi_\alpha}(\prod_{i=1}^{n}(\nu^{\omega_i}_{\alpha_{\sigma(i)}})^{2}) \le (\nu^{+})^{2}。$$

于是由以上证明得

$$(\mu^{-})^{2}-(\nu^{+})^{2} \le$$
$$\frac{1}{|\Gamma_\alpha|}\sum_{\Gamma_\alpha}(1-\prod_{i=1}^{n}(1-\mu^{2}_{\alpha_{\sigma(i)}})^{\omega_i})-\frac{1}{|\Psi_\alpha|}\sum_{\Psi_\alpha}(\prod_{i=1}^{n}(\nu^{\omega_i}_{\alpha_{\sigma(i)}})^{2}) \le$$
$$(\mu^{+})^{2}-(\nu^{-})^{2}$$

即 $$s_{\mu^{-}} \le s_\alpha \le s_{\mu^{+}},$$

从而 $$\alpha^{-} \le PHFOWA(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) \le \alpha^{+}。$$

定理 3　单调性。设

$$\alpha_i = <\Gamma_{\alpha_i},\Psi_{\alpha_i}> \in PHFN,\ \beta_i = <\Gamma_{\beta_i},\Psi_{\beta_i}> \in PHFN(i=1,2,\cdots,n)$$

其中 $$\Gamma_{\alpha_i}=\{\mu_{\alpha_{i1}},\mu_{\alpha_{i2}},\cdots,\mu_{\alpha_{ik}}\},\quad \Psi_{\alpha_i}=\{\nu_{\alpha_{i1}},\nu_{\alpha_{i2}},\cdots,\nu_{\alpha_{is}}\},$$
$$\Gamma_{\beta_i}=\{\mu_{\beta_{i1}},\mu_{\beta_{i2}},\cdots,\mu_{\beta_{ik}}\},\quad \Psi_{\beta_i}=\{\nu_{\beta_{i1}},\nu_{\beta_{i2}},\cdots,\nu_{\beta_{is}}\}。$$

如果 $$\mu_{\alpha_{\sigma(i)p}} \le \mu_{\beta_{\sigma(i)p}},\ \nu_{\alpha_{\sigma(i)q}} \ge \nu_{\beta_{\sigma(i)q}},\ p=1,2,\cdots,k,\ q=1,2,\cdots,s,$$

则 $$PHFOWA(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) \le PHFOWA(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$$

其中 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^T$ 是与 *PHFOWA* 算子相关联的位置权重向量，且 $\omega_i \ge 0, i=1,2,\cdots,n, \sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i=1$ 。

证明　设 $\alpha = PHFOWA(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),\ \beta = PHFOWA(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 。考虑到 $|\Gamma_{\alpha_i}|=|\Gamma_{\beta_i}|=k$ ，$|\Psi_{\alpha_i}|=|\Psi_{\beta_i}|=s$ ，则

$$|\Gamma_\alpha|=|\Gamma_\beta|=k^n, |\Psi_\alpha|=|\Psi_\beta|=s^n.$$

由 $\mu_{\alpha_{\sigma(i)p}} \le \mu_{\beta_{\sigma(i)p}}$ 可得 $(1-\mu^{2}_{\alpha_{\sigma(i)p}})^{\omega_i} \ge (1-\mu^{2}_{\beta_{\sigma(i)p}})^{\omega_i}$ ，于是

$$\prod_{i=1}^{n}(1-\mu^{2}_{\alpha_{\sigma(i)p}})^{\omega_i} \ge \prod_{i=1}^{n}(1-\mu^{2}_{\beta_{\sigma(i)p}})^{\omega_i},$$

即有 $$1-\prod_{i=1}^{n}(1-\mu^{2}_{\alpha_{\sigma(i)p}})^{\omega_i} \le 1-\prod_{i=1}^{n}(1-\mu^{2}_{\beta_{\sigma(i)p}})^{\omega_i}。$$

于是 $$\frac{1}{k^n}\sum_{\Gamma_\alpha}(1-\prod_{i=1}^{n}(1-\mu^{2}_{\alpha_{\sigma(i)p}})^{\omega_i}) \le \frac{1}{k^n}\sum_{\Gamma_\beta}(1-\prod_{i=1}^{n}(1-\mu^{2}_{\beta_{\sigma(i)p}})^{\omega_i})$$

成立。

类似地，由 $\nu_{\alpha_{\sigma(i)q}} \ge \nu_{\beta_{\sigma(i)q}}$ 可得 $\prod\limits_{i=1}^{n}\nu^{\omega_i}_{\alpha_{\sigma(i)q}} \ge \prod\limits_{i=1}^{n}\nu^{\omega_i}_{\beta_{\sigma(i)q}}$ 。于是 $\frac{1}{s^n}\sum\limits_{\Psi_\alpha}(\prod\limits_{i=1}^{n}\nu^{\omega_i}_{\alpha_{\sigma(i)q}})^{2} \ge \frac{1}{s^n}\sum\limits_{\Psi_\beta}(\prod\limits_{i=1}^{n}\nu^{\omega_i}_{\beta_{\sigma(i)q}})^{2}$ 成立。

于是 $$\frac{1}{k^n}\sum_{\Gamma_\alpha}(1-\prod_{i=1}^{n}(1-\mu^{2}_{\alpha_{\sigma(i)p}})^{\omega_i})-\frac{1}{s^n}\sum_{\Psi_\alpha}(\prod_{i=1}^{n}\nu^{\omega_i}_{\alpha_{\sigma(i)q}})^{2}$$
$$\le \frac{1}{k^n}\sum_{\Gamma_\beta}(1-\prod_{i=1}^{n}(1-\mu^{2}_{\beta_{\sigma(i)p}})^{\omega_i})-\frac{1}{s^n}\sum_{\Psi_\beta}(\prod_{i=1}^{n}\nu^{\omega_i}_{\beta_{\sigma(i)q}})^{2}$$

即有 $s_\alpha \le s_\beta$ ，故 $PHFOWA(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) \le PHFOWA(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 。

定理 4　置换不变性。设 $\alpha_i = <\Gamma_{\alpha_i},\Psi_{\alpha_i}> \in PHFN$ $(i=1,2,\cdots,n)$ ，$\alpha'_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的一个置换，则

$$PHFOWA(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) = PHFOWA(\alpha'_1,\alpha'_2,\cdots,\alpha'_n)$$

定义 9　设 $\alpha_i = <\Gamma_{\alpha_i},\Psi_{\alpha_i}> \in PHFN(i=1,2,\cdots,n)$,若

$$GPHFOWA(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\left(\mathop{\oplus}_{i=1}^{n}\omega_i\alpha^{\lambda}_{\sigma(i)}\right)^{1/\lambda},$$

则称 *GPHFOWA* 为广义毕达哥拉斯犹豫模糊有序加权平均算子，简称 *GPHFOWA* 算子，其中，$\lambda>0$ ，$(\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(n))$ 是 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个置换，且满足 $\alpha_{\sigma(1)} \ge \alpha_{\sigma(2)} \ge \cdots \ge \alpha_{\sigma(n)}$ ，$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^T$ 是与 *GPHFOWA* 算子相关联的位置权重向量，且 $\omega_i \ge 0, i=1,2,\cdots,n, \sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i=1$ 。

显然，当 $\lambda=1$ 时，*GPHFOWA* 算子退化为 *PHFOWA* 算子。

定理 5　设 $\alpha_i = <\Gamma_{\alpha_i},\Psi_{\alpha_i}> \in PHFN(i=1,2,\cdots,n)$ ，则

$$GPHFOWA(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=$$
$$<\bigcup_{\mu_{\alpha_{\sigma(i)}}\in\Gamma_{\alpha_{\sigma(i)}}}\left\{\left(\sqrt{1-\prod_{i=1}^{n}(1-\mu^{2\lambda}_{\sigma(i)})^{\omega_i}}\right)^{1/\lambda}\right\},$$
$$\bigcup_{\nu_{\alpha_{\sigma(i)}}\in\Psi_{\alpha_{\sigma(i)}}}\left\{\sqrt{1-\left(1-\prod_{i=1}^{n}(1-(1-\nu^{2}_{\sigma(i)})^{\lambda})^{\omega_i}\right)^{1/\lambda}}\right\}>。$$

定理 6　有界性。设 $\alpha_i = <\Gamma_{\alpha_i},\Psi_{\alpha_i}> \in PHFN$ $(i=1,2,\cdots,n)$ ，$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^T$ 是与 *GPHFOWA* 算子相关联的位置权重向量，且 $\omega_i \ge 0, i=1,2,\cdots,n, \sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i=1$ 。令 $\alpha^{-}=<\mu^{-},\nu^{+}>,\ \alpha^{+}=<\mu^{+},\nu^{-}>$ ，其中,

$$\mu^{-}=\min\{\mu\in\Gamma_{\alpha_i} \mid i=1,2,\cdots,n\},$$
$$\mu^{+}=\max\{\mu\in\Gamma_{\alpha_i} \mid i=1,2,\cdots,n\},$$
$$\nu^{-}=\min\{\nu\in\Psi_{\alpha_i} \mid i=1,2,\cdots,n\},$$
$$\nu^{+}=\max\{\nu\in\Psi_{\alpha_i} \mid i=1,2,\cdots,n\}。$$

则 $\alpha^{-} \le GPHFOWA(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) \le \alpha^{+}$ 。

定理 7　单调性。设

$$\alpha_i = <\Gamma_{\alpha_i},\Psi_{\alpha_i}> \in PHFN,\ \beta_i = <\Gamma_{\beta_i},\Psi_{\beta_i}> \in PHFN(i=1,2,\cdots,n),$$

其中 $$\Gamma_{\alpha_i}=\{\mu_{\alpha_{i1}},\mu_{\alpha_{i2}},\cdots,\mu_{\alpha_{ik}}\},\quad \Psi_{\alpha_i}=\{\nu_{\alpha_{i1}},\nu_{\alpha_{i2}},\cdots,\nu_{\alpha_{is}}\},$$
$$\Gamma_{\beta_i}=\{\mu_{\beta_{i1}},\mu_{\beta_{i2}},\cdots,\mu_{\beta_{ik}}\},\quad \Psi_{\beta_i}=\{\nu_{\beta_{i1}},\nu_{\beta_{i2}},\cdots,\nu_{\beta_{is}}\}。$$

如果 $$\mu_{\alpha_{\sigma(i)p}} \le \mu_{\beta_{\sigma(i)p}},\ \nu_{\alpha_{\sigma(i)q}} \ge \nu_{\beta_{\sigma(i)q}},\ p=1,2,\cdots,k,\ q=1,2,\cdots,s,$$

则 $$GPHFOWA(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) \le GPHFOWA(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n),$$

其中 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^T$ 是与 *GPHFOWA* 算子相关联的位置权重向量，且 $\omega_i \ge 0, i=1,2,\cdots,n, \sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i=1$ 。

定理 8　置换不变性。设

$$\alpha_i = <\Gamma_{\alpha_i},\Psi_{\alpha_i}> \in PHFN\ (i=1,2,\cdots,n)$$

$\alpha'_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的一个置换，则

$$GPHFOWA(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) = GPHFOWA(\alpha'_1,\alpha'_2,\cdots,\alpha'_n)。$$

考虑到 *PHFWA* 算子仅对毕达哥拉斯犹豫模糊数进行加权，忽略了数据所在的位置权重，而 *PHFOWA* 算子仅仅对毕达哥拉斯犹豫模糊数的位置进行加权，但未考虑数据自身的重要性。为了克服上述问题，受 Xu 等人[42]提出的混合平均算子的启发,下面给出毕达哥拉斯犹豫模糊数混合平均算子。

定义 10　设 $\alpha_i = <\Gamma_{\alpha_i},\Psi_{\alpha_i}> \in PHFN(i=1,2,\cdots,n)$, 若函数

$$PHFHWA: PHFN^n \to PHFN,$$
$$PHFHWA(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\mathop{\oplus}_{j=1}^{n}\omega_j\dot{\alpha}_{\sigma(j)}$$

则称 *PHFHWA* 为毕达哥拉斯犹豫模糊混合平均算子，简称 *PHFHWA* 算子，其中 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^T$ 为与 *PHFHWA* 算子相关

联的位置权重向量，满足 $\omega_j \ge 0$ 且 $\sum_{j=1}^{n}\omega_j = 1$，$\dot{\alpha}_j = nw_j\alpha_j(j=1,2,\cdots,n)$，$(\dot{\alpha}_{\sigma(1)},\dot{\alpha}_{\sigma(2)},\cdots,\dot{\alpha}_{\sigma(n)})$ 表示加权的毕达哥拉斯犹豫模糊数组 $(\dot{\alpha}_1,\dot{\alpha}_2,\cdots,\dot{\alpha}_n)$ 的一个置换，使得 $\dot{\alpha}_{\sigma(j)} \ge \dot{\alpha}_{\sigma(j+1)}, j=1,2,\cdots,n$，$w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^T$ 为 $\alpha_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的权重向量，满足 $w_j \ge 0$ 且 $\sum_{j=1}^{n}w_j = 1$，n 为平衡系数。

定理 9　设 $\alpha_i = <\Gamma_{\alpha_i},\Psi_{\alpha_i}> \in PHFN(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$PHFHWA(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=$$
$$<\bigcup_{\mu_{\dot{\alpha}_{\sigma(j)}}\in\Gamma_{\dot{\alpha}_{\sigma(j)}}}\{\sqrt{1-\prod_{j=1}^{n}(1-\mu^2_{\dot{\alpha}_{\sigma(j)}})^{\omega_j}}\},\bigcup_{\nu_{\dot{\alpha}_{\sigma(j)}}\in\Psi_{\dot{\alpha}_{\sigma(j)}}}\{\prod_{j=1}^{n}\nu^{\omega_j}_{\dot{\alpha}_{\sigma(j)}}\}>.$$

定理 10　$PHFWA$ 算子和 $PHFOWA$ 算子是 $PHFHWA$ 算子的特例。

3　毕达哥拉斯犹豫模糊几何平均算子

定义 11　设 $\alpha_i = <\Gamma_{\alpha_i},\Psi_{\alpha_i}> \in PHFN(i=1,2,\cdots,n)$，若

$PHFOWG: PHFN^n \to PHFN$，$PHFOWG(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\bigotimes_{i=1}^{n}\alpha^{\omega_i}_{\sigma(i)}$，

则称 $PHFOWG$ 为毕达哥拉斯犹豫模糊有序加权几何平均算子，简记为 $PHFOWG$ 算子，其中 $(\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(n))$ 是 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个置换，且满足 $\alpha_{\sigma(1)} \ge \alpha_{\sigma(2)} \ge \cdots \ge \alpha_{\sigma(n)}$，$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^T$ 是与 $PHFOWG$ 算子相关联的指数权重向量，且 $\omega_i \ge 0, i=1,2,\cdots,n, \sum_{i=1}^{n}\omega_i = 1$。

定理 11　设 $\alpha_i = <\Gamma_{\alpha_i},\Psi_{\alpha_i}> \in PHFN(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$PHFOWG(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=$$
$$<\bigcup_{\mu_{\alpha_{\sigma(i)}}\in\Gamma_{\alpha_{\sigma(i)}}}\{\prod_{i=1}^{n}\mu^{\omega_i}_{\alpha_{\sigma(i)}}\},\bigcup_{\nu_{\alpha_{\sigma(i)}}\in\Psi_{\alpha_{\sigma(i)}}}\{\sqrt{1-\prod_{i=1}^{n}(1-\nu^2_{\alpha_{\sigma(i)}})^{\omega_i}}\}>。$$

其中，$(\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(n))$ 是 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个置换，且满足 $\alpha_{\sigma(1)} \ge \alpha_{\sigma(2)} \ge \cdots \ge \alpha_{\sigma(n)}$，$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^T$ 是与 $PHFOWG$ 算子相关联的指数权重向量，且 $\omega_i \ge 0, i=1,2,\cdots,n, \sum_{i=1}^{n}\omega_i = 1$。

类似于 $PHFOWA$ 算子，可证明 $PHFOWG$ 算子具有有界性、单调性和置换不变性。

定义 12　设 $\alpha_i = <\Gamma_{\alpha_i},\Psi_{\alpha_i}> \in PHFN(i=1,2,\cdots,n)$，若 $GPHFOWG(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\frac{1}{\lambda}\left(\bigotimes_{i=1}^{n}(\lambda\alpha_{\sigma(i)})^{\omega_i}\right)$，则称 $GPHFOWG$ 为广义毕达哥拉斯犹豫模糊有序加权几何平均算子，简称 $GPHFOWG$ 算子，其中，$\lambda>0$，$(\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(n))$ 是 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个置换，且满足 $\alpha_{\sigma(1)} \ge \alpha_{\sigma(2)} \ge \cdots \ge \alpha_{\sigma(n)}$，$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^T$ 是与 $GPHFOWG$ 算子相关联的指数权重向量，且 $\omega_i \ge 0, i=1,2,\cdots,n, \sum_{i=1}^{n}\omega_i = 1$。

显然，当 $\lambda=1$ 时，$GPHFOWG$ 算子退化为 $PHFOWG$ 算子。

定理 12　设 $\alpha_i = <\Gamma_{\alpha_i},\Psi_{\alpha_i}> \in PHFN(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$GPHFOWG(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$$
$$=<\bigcup_{\mu_{\alpha_{\sigma(i)}}\in\Gamma_{\alpha_{\sigma(i)}}}\{\sqrt{1-\left(1-\prod_{i=1}^{n}(1-(1-\mu^2_{\alpha_{\sigma(i)}})^{\lambda})^{\omega_i}\right)^{1/\lambda}}\},$$
$$\bigcup_{\nu_{\alpha_{\sigma(i)}}\in\Psi_{\alpha_{\sigma(i)}}}\{\left(\sqrt{1-\prod_{i=1}^{n}(1-\nu^{2\lambda}_{\alpha_{\sigma(i)}})^{\omega_i}}\right)^{1/\lambda}\}>。$$

可证明 $GPHFOWG$ 算子具有有界性、单调性和置换不变性。

类似于 $PHFHWA$ 算子，给出毕达哥拉斯犹豫模糊数混合几何平均算子。

定义 13　设 $\alpha_i = <\Gamma_{\alpha_i},\Psi_{\alpha_i}> \in PHFN(i=1,2,\cdots,n)$，若函数

$$PHFHWG: PHFN^n \to PHFN,$$
$$PHFHWG(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\bigotimes_{j=1}^{n}\ddot{\alpha}^{\omega_j}_{\sigma(j)}$$

则称 $PHFHWG$ 为毕达哥拉斯犹豫模糊混合算术平均算子，简称 $PHFHWG$ 算子，其中 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^T$ 为与 $PHFHWG$ 算子相关联的指数权重向量，满足 $\omega_j \ge 0$ 且 $\sum_{j=1}^{n}\omega_j = 1$，$\ddot{\alpha}_j = \alpha_j^{nw_j}(j=1,2,\cdots,n)$，$(\ddot{\alpha}_{\sigma(1)},\ddot{\alpha}_{\sigma(2)},\cdots,\ddot{\alpha}_{\sigma(n)})$ 表示加权的毕达哥拉斯犹豫模糊数组 $(\ddot{\alpha}_1,\ddot{\alpha}_2,\cdots,\ddot{\alpha}_n)$ 的一个置换，使得 $\ddot{\alpha}_{\sigma(j)} \ge \ddot{\alpha}_{\sigma(j+1)}, j=1,2,\cdots,n$，$w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^T$ 为 $\alpha_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的指数权重向量，满足 $w_j \ge 0$ 且 $\sum_{j=1}^{n}w_j = 1$，n 为平衡系数。

定理 13　设 $\alpha_i = <\Gamma_{\alpha_i},\Psi_{\alpha_i}> \in PHFN(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$PHFHWG(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=$$
$$<\bigcup_{\mu_{\ddot{\alpha}_{\sigma(j)}}\in\Gamma_{\ddot{\alpha}_{\sigma(j)}}}\{\prod_{j=1}^{n}\mu^{\omega_j}_{\ddot{\alpha}_{\sigma(j)}}\},\bigcup_{\nu_{\ddot{\alpha}_{\sigma(j)}}\in\Psi_{\ddot{\alpha}_{\sigma(j)}}}\{\sqrt{1-\prod_{j=1}^{n}(1-\nu^2_{\ddot{\alpha}_{\sigma(j)}})^{\omega_j}}\}>$$

定理 14　$PHFWG$ 算子和 $PHFOWG$ 算子是 $PHFHWG$ 算子的特例。

4　决策应用

4.1　决策方法

设方案集 $X=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，$C=\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$ 为属性集，属性权重向量 $w=(w_1,w_2,\cdots w_n)^T$，其中 $w_i \ge 0$ 且 $\sum_{i=1}^{n}w_i = 1$。决策者给出方案 a_i 在属性 c_j 下的属性值为 α_{ij}，其中 $\alpha_{ij} = <\Gamma_{\alpha_{ij}},\Psi_{\alpha_{ij}}>$ ($i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$)为毕达哥拉斯犹豫模糊数，于是得到毕达哥拉斯犹豫模糊数决策矩阵 $M=(\alpha_{ij})_{mn}$。下面结合毕达哥拉斯犹豫模糊集成算子，提出毕达哥拉斯犹豫模糊信息多属性决策方法，具体步骤如下：

a) 根据实际情况，建立毕达哥拉斯犹豫模糊决策矩阵 $M=(\alpha_{ij})_{mn}$。

b) 利用毕达哥拉斯犹豫模糊集成算子对方案进行集成，得到方案综合属性值。

c) 求出每个方案的得分函数值。

d) 根据方案得分函数值实现方案排序择优。

4.2　决策案例

例 1[34]　某国有大型有色金属集团公司准备进行海外投资，成立了由 1 位执行经理和 2 位专家组成的决策小组，进行初期调查研究，以确定合适的投资国。经调查研究有 a_1,a_2,a_3,a_4 四个国家成为了考察对象，决策小组从四个方面进行评估：c_1：政治政策；c_2：基础设施；c_3：矿产资源；c_4：经济情况，其权重向量为 $w=(0.15,0.15,0.375,0.325)^T$。为使决策更加合理，每位决策者匿名给出评价结果，其中满意度和非满意度若有重复，则仅取 1 次，于是得到决策小组针对方案 a_i 在属性 c_j 下的毕达哥拉斯犹豫模糊数评价值 $\alpha_{ij} = <\Gamma_{\alpha_{ij}},\Psi_{\alpha_{ij}}>$，$i,j=1,2,3,4$，即得到毕达哥拉斯犹豫模糊决策矩阵 $M=(\alpha_{ij})_{4\times4}$。试根据决策小组提供的决策矩阵，对方案进行排序，为该企业选择合适投资国提供参考。

a) 建立毕达哥拉斯犹豫模糊决策矩阵,如表 1 所示。

表 1　毕达哥拉斯犹豫模糊决策矩阵

Table 1　Pythagorean hesitant fuzzy decision matrix

	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	<{0.3,0.8},{0.4}>	<{0.6,0.8},{0.4,0.5}>	<{0.7,0.8},{0.4,0.5}>	<{0.5,0.7,0.8},{0.4}>
a_2	<{0.7,0.8},{0.3,0.4}>	<{0.3,0.4,0.5},{0.7}>	<{0.3,0.4},{0.7,0.8}>	<{0.6,0.7},{0.3,0.4}>
a_3	<{0.4,0.5},{0.6}>	<{0.4,0.5,0.6},{0.5}>	<{0.7,0.8},{0.4,0.5}>	<{0.8,0.9},{0.3}>
a_4	<{0.5,0.6},{0.2,0.3}>	<{0.7},{0.4,0.5}>	<{0.5,0.6,0.7},{0.6}>	<{0.7,0.8},{0.2,0.3}>

b) 利用 $PHFHWA$ 算子对方案进行集成。

首先，使用 $PHFHWA$ 算子对方案 a_1 在各属性下的属性值进行集成

(a) 求出：

$$\dot{\alpha}_{11} = 4\times 0.15\alpha_{11} = 0.6 < \{0.3, 0.8\}, \{0.4\} > \\ = < \{0.2346, 0.6770\}, \{0.5771\} >,$$

$$\dot{\alpha}_{12} = 4\times 0.15\alpha_{12} = 0.6 < \{0.6, 0.8\}, \{0.4, 0.5\} > \\ = < \{0.4847, 0.6770\}, \{0.5771, 0.6598\} >,$$

$$\dot{\alpha}_{13} = 4\times 0.375\alpha_{12} = 1.5 < \{0.7, 0.8\}, \{0.4, 0.5\} > \\ = < \{0.7974, 0.8854\}, \{0.2530, 0.3536\} >,$$

$$\dot{\alpha}_{14} = 4\times 0.325\alpha_{12} = 1.3 < \{0.5, 0.7, 0.8\}, \{0.4\} > \\ = < \{0.5586, 0.7637, 0.8573\}, \{0.3039\} > 。$$

(b) 求出得分函数值：

$$s(\dot{\alpha}_{11}) = -0.0764, s(\dot{\alpha}_{12}) = -0.0376, ,$$

$$s(\dot{\alpha}_{13}) = 0.6154, s(\dot{\alpha}_{14}) = 0.4511 ,$$

从而得到

$$\dot{\alpha}_{1\sigma(1)} = \dot{\alpha}_{13}, \dot{\alpha}_{1\sigma(2)} = \dot{\alpha}_{14}, \dot{\alpha}_{1\sigma(3)} = \dot{\alpha}_{12}, \dot{\alpha}_{1\sigma(4)} = \dot{\alpha}_{11} 。$$

(c) 利用正态分布法[43]确定与 *PHFHWA* 算子相关联的位置权重向量为

$$\omega = (0.155, 0.345, 0.345, 0.155)^T 。$$

(d) 使用定理 9 公式计算出方案 a_1 的综合属性值：

$$a_1 = < \{0.5664, 0.6112, 0.6139, 0.6522, 0.6301, 0.6663, \\ 0.6685, 0.6999, 0.6547, 0.6878, 0.6898, \quad 0.7187, \\ 0.7020, 0.7295, 0.7312, 0.7556, 0.7150, 0.7411, 0.7427, \\ 0.7658, 0.7524, 0.7745, 0.7759, 0.7956\}, \{0.4071, 0.4263, \\ 0.4287, 0.4490\} > .$$

其次，类似地可以求出其他方案的综合属性值

$$a_2 = < \{0.4994, 0.5319, 0.5050, 0.5369, 0.5126, 0.5438, \\ 0.5290, 0.5586, 0.5340, 0.5632, 0.5410, 0.5695, 0.5492, \\ 0.5769, 0.5539, 0.5812, 0.5604, 0.5872, 0.5744, 0.5999, \\ 0.5788, 0.6039, 0.5847, 0.6094\}, \{0.4919, 0.5212, \\ 0.5585, 0.5271, 0.5221, 0.5532, 0.5928, 0.5594\} > .$$

$$a_3 = < \{0.6744, 0.7216, 0.6786, 0.7251, 0.6837, 0.7293, \\ 0.6878, 0.7326, 0.6846, 0.7300, 0.6886, 0.7333, 0.7380, \\ 0.7744, 0.7412, 0.7771, 0.7451, 0.7804, 0.7483, 0.7830, \\ 0.7458, 0.7809, 0.7489, 0.7835\}, \{0.4035, 0.4529\} > .$$

$$a_4 = < \{0.5781, 0.6159, 0.6319, 0.5964, 0.6218, 0.6544, \\ 0.6375, 0.6683, 0.6743, 0.7012, 0.7128, 0.6872\}, \{0.4047, \\ 0.3730, 0.3653, 0.3964, 0.4402, 0.4056, 0.3973, 0.4311\} > .$$

c) 方案综合属性值的得分函数值分别为

$$s(a_1) = 0.3126, s(a_2) = 0.0186, s(a_3) = -0.0413, \\ s(a_4) = 0.2600 。$$

d) 由 $s(a_1) > s(a_4) > s(a_2) > s(a_3)$ 可知，方案排序为 $a_1 \succ a_4 \succ a_2 \succ a_3$，即方案 a_1 是最优的。

4.3 方法比较

1) 与毕达哥拉斯犹豫模糊算子的比较

首先，使用 *PHFWA* 算子[34]对方案进行了集成。求出方案综合属性值,进而计算出了各方案的得分函数值分别为：$s(a_1) = 0.2984, s(a_2) = 0.0358, s(a_3) = 0.3527, \ s(a_4) = 0.3143$，从而由 $s(a_3) \ge s(a_4) \ge s(a_1) \ge s(a_2)$，得到方案排序为 $a_3 \succ a_4 \succ a_1 \succ a_2$。

其次，使用文中 *PHFOWA* 算子求出方案综合属性值,进而可以求出方案的得分函数值分别为 $s(a_1) = 0.0619, s(a_2) = 0.0858, s(a_3) = 0.2613, \ s(a_4) = 0.3070$，从而由 $s(a_4) \ge s(a_3) \ge s(a_2) \ge s(a_1)$，得到方案排序为 $a_4 \succ a_3 \succ a_2 \succ a_1$。

显然，使用 *PHFWA* 算子和 *PHFOWA* 算子得到的方案排序结果，与使用 *PHFHWA* 算子得到方案排序完全不同。其原因在于，*PHFWA* 算子仅考虑了集成信息的重要性，忽略了集成算子的位置权重信息，而 *PHFOWA* 算子仅考虑到了集成算子的位置权重信息，忽略了集成信息的重要性，故由既考虑到集成信息的重要性，又兼顾集成算子的位置重要性的 *PHFHWA* 算子得到的集成结果，更加符合决策实际，也更加科学合理。

2) 与其他集成算子的比较

由于毕达哥拉斯模糊集成算子没有考虑决策者的犹豫，因此所有的毕达哥拉斯模糊集成算子以及相关决策方法均无法在毕达哥拉斯犹豫模糊决策环境中加以应用。同时，考虑到毕达哥拉斯犹豫模糊属性值的隶属度和非隶属的和超过 1，故而所有直觉模糊集成算子和直觉犹豫模糊集成算子以及相关的直觉模糊和直觉犹豫模糊决策方法也均不能应用于此类决策信息环境，而文中提出的毕达哥拉斯犹豫模糊集成算子可以解决此类问题。

3) 与毕达哥拉斯犹豫模糊相关系数的比较

使用文[37]提出的毕达哥拉斯犹豫模糊集相关系数，可以得到方案排序为 $a_3 \succ a_1 \succ a_4 \succ a_2$。其结果与 *PHFWA* 算子、*PHFOWA* 算子、*PHFHWA* 算子均不完全相同。其原因在于，毕达哥拉斯犹豫模糊集相关系数是借助于统计学中的相关系数概念，从方案的整体性考虑的，并通过各方案与正理想方案之间的相关程度体现各方案的优劣。而毕达哥拉斯犹豫模糊集成算子是以毕达哥拉斯犹豫模糊数的运算为基础，通过相关运算来实现属性值的集成以及方案排序。因此，这两种方法的出发点和相关理论依据均不相同，故而由它们得到的方案排序也是不相同的。

4.4 决策方法优点

根据上面的决策实例以及方法比较可知，文中决策方法具有以下优点：第一，描述模糊现象的范围更加广泛。当属性值的隶属度和非隶属度之和超过 1 而其平方和不超过 1，同时在隶属度和非隶属度上又出现犹豫不决时，此时毕达哥拉斯犹豫模糊数可以加以表达，但直觉模糊数，直觉犹豫模糊数以及毕达哥拉斯模糊数均不能描述此类现象。第二，集成算子应用范围更加广泛。显然，已有的毕达哥拉斯模糊集成算子、直觉模糊集成算子和直觉犹豫模糊集成算子均不能对此类决策信息进行集成，而毕达哥拉斯犹豫模糊集成算子适合此类问题，因此其应用范围更加广泛。第三，毕达哥拉斯犹豫模糊集成算子更具有一般性。由于毕达哥拉斯模糊数、直觉犹豫模糊数以及直觉模糊数均为毕达哥拉斯犹豫模糊数的特例，因此毕达哥拉斯犹豫模糊集成算子可以在毕达哥拉斯模糊决策环境、直觉犹豫模糊决策环境以及直觉模糊决策环境下使用，反之则不然，因此毕达哥拉斯犹豫模糊集成算子是毕达哥拉斯模糊集成算子、直觉犹豫模糊集成算子以及直觉模糊集成算子的推广，也更具有一般性。

5 结束语

较为系统地研究毕达哥拉斯犹豫模糊集成算子，得到了两类集成算子：毕达哥拉斯犹豫模糊平均算子和毕达哥拉斯犹豫模糊几何算子，其中包括 PHFOWA 算子、GPHFOWA 算子和 PHFHWA 算子，以及 PHFOWG 算子、GPHFOWG 算子和 PHFHWG 算子，并给出了它们的计算公式，讨论了它们的性质。最后，提出了基于毕达哥拉斯犹豫模糊集成算子的多属性决策方法，并通过选择合适海外投资国的案例以及与已有的决策方法对比，说明了所提方法的其可行性。文中研究结果进一步完善了毕达哥拉斯犹豫模糊信息集成算子理论，发展了毕达哥拉斯犹豫模糊多属性决策理论和方法。由于文中研究的毕达哥拉斯犹豫模糊集成算子均为属性相互独立下的集成算子，因此接下来将研究属性相互影响的毕达哥拉斯犹豫模糊集成算子，并同时将开展毕达哥拉斯模糊集的距离测度、相似测度等内容的研究。

参考文献：

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets [J]. Information and Control, 1965, 8 (3):

338-353.

[2] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20 (1): 87-96.

[3] Atanassov K. New operators defined over the intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 61 (2): 137-142.

[4] De S K, Biswas R, Roy A R. Some operators on the intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 114 (3): 477-484.

[5] Xu Zeshui. Intuitionistic fuzzy aggregation operators [J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2007, 15 (6): 1179-1187.

[6] Xu Zeshui, Yager R R. Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets [J]. International Journal of General Systems, 2006, 35 (4): 417-433.

[7] Zhao Hua, Xu Zeshui, Ni Mingfang, *et al*. Generalized aggregation operators for intuitionistic fuzzy sets [J]. International Journal of intelligent Systems, 2010, 25 (1): 1-30.

[8] Tan Chunqiao. Generalized intuitionistic fuzzy geometric aggregation operator and its application to multi-criteria group decision making [J]. Soft Computing, 2011, 15 (5): 867-876.

[9] Yang Wei, Chen Zhiping. The quasi-arithmetic intuitionistic fuzzy OWA operators [J]. Knowledge-Based Systems, 2012, 27 (3): 219-233.

[10] Tan Chunqiao, Chen Xiaohong. Intuitionistic fuzzy Choquet integral operator for multi-criteria decision making [J]. Expert Systems with Applications, 2010, 37 (1): 149-157.

[11] Xu Zeshui. Choquet integrals of weighted intuitionistic fuzzy information [J]. Information Sciences, 2010, 180 (5): 726-736.

[12] Xu Zeshui, Chen Jian, Wu Junjie. Clustering algorithm for intuitionistic fuzzy sets [J]. Information Sciences, 2008, 178 (19): 3775-3790.

[13] Gerstenkorn T, Mańko J. Correlation of intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 44 (1): 39-43.

[14] Bustince H, Burillo P. Correlation of interval-valued intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1995, 74 (2): 237-244.

[15] Hong D H, Hwang S Y. Correlation of intuitionistic fuzzy sets in probability spaces [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1995, 75 (1): 77-81.

[16] Yager R R. Abbasov A M. Pythagorean membership grades, complex numbers and decision making [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2013, 28 (5): 436-452.

[17] Yager R R. Pythagorean membership grades in multicriteria decision making [J]. IEEE Transaction on Fuzzy Systems, 2014, 22 (4): 958-965.

[18] Zhang Xiaolu, Xu Zeshui. Extension of TOPSIS to multiple criteria decision making with Pythagorean fuzzy sets [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2014, 29 (12): 1061-1078.

[19] Gou Xunjie, Xu Zeshui, Ren Peijia. The properties of continuous Pythagorean fuzzy information [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2016, 31 (5): 401-424.

[20] Peng Xindong, Yang Yong. Fundamental properties of interval-valued Pythagorean fuzzy aggregation operators [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2016, 31 (5): 444-487.

[21] 刘卫锋，常娟，何霞．广义毕达哥拉斯模糊集成算子及其决策应用 [J]．控制与决策, 2016, 31 (12): 2280-2286. (Liu Weifeng, Chang Juan, He Xia. Generalized Pythagorean fuzzy aggregation operators and applications in decision making [J]. Control and Decision, 2016, 31 (12): 2280-2286.)

[22] 刘卫锋，杜迎雪，常娟．毕达哥拉斯模糊交叉影响集成算子及其决策应用 [J]．控制与决策, 2017, 32 (6): 1033-1040. (Liu Weifeng, Du Yingxue, Chang Juan. Pythagorean fuzzy interaction aggregation operators and applications in decision making [J]. Control and Decison, 2017, 32 (6): 1033-1040.)

[23] 何霞，杜迎雪，刘卫锋．毕达哥拉斯模糊幂平均算子 [J]．模糊系统与数学, 2016, 30 (6): 116-124. (He Xia, Du Yingxue, Liu Weifeng. Pythagorean fuzzy power average operators [J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2016, 30 (6): 116-124.)

[24] Garg H. A new generalized Pythagorean fuzzy information aggregation using Einstein operations and its application to decision making [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2016, 31 (9): 886-920.

[25] Garg H. Generalized Pythagorean fuzzy geometric aggregation operators using Einstein t-norm and t-conorm for multicriteria decision-making process [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2017, 32 (6): 597-630.

[26] Wu Shengjun, Wei Geiwu. Pythagorean fuzzy Hamacher aggregation operators and their application to multiple attribute decision making [J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 97 (3): 24-39.

[27] 刘卫锋，常娟，何霞．毕达哥拉斯模糊 Hamacher 集成算子及其决策应用 [J]．系统工程理论与实践, 2018, 8 (6): 1566-1574. (Liu Weifeng, Chang Juan, He Xia. Pythagorean fuzzy Hamacher aggregation operators and its application to decision making [J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2018, 8 (6): 1566-1574.)

[28] Peng Xindong, Yang Yong. Pythagorean fuzzy Choquet integral based MABAC method for multiple attribute group decision making [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2016, 31 (10): 989-1020.

[29] 李德清，曾文艺，尹乾．勾股模糊集的距离测度及其在多属性决策中的应用 [J]．控制与决策, 2017, 32 (10): 1817-1823. (Li Deqing, Zeng Wenyi, Yin Qian. Distance measures of Pythagorean fuzzy sets and their applications in multiattribute decision making [J]. Control and Decision, 2017, 32 (10): 1817-1823.)

[30] Garg H. A novel correlation coefficients between Pythagorean fuzzy sets and its applications to decision-making processes [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2016, 31 (12): 1234-1252.

[31] 张超，李德玉．勾股模糊粗糙集及其在多属性决策中的应用 [J]．小型微型计算机系统, 2016, 37 (7): 1531-1535. (Zhang Chao, Li Deyu. Pythagorean fuzzy rough sets and its applications in multi-attribute decision making [J]. Journal of Chinese Computer Systems, 2016, 37 (7): 1531-1535.)

[32] 彭新东，杨勇，宋娟萍，等．毕达哥拉斯模糊软集及其应用 [J]．计算机工程, 2015, 41 (7): 224-229. (Peng Xindong, Yang Yong, Song Juanping *et al*. Pythagorean fuzzy soft sets and its application [J]. Computing Engineering, 2015, 41 (7): 224-229.)

[33] 彭新东，杨勇．基于 Pythagorean 模糊语言集多属性群决策方法 [J]．计算机工程与应用, 2016, 52 (23): 50-54. (Peng Xindong, Yang Yong. Multiple attribute group decision making methods based on Pythagorean fuzzy linguistic set [J]. Computer Engineering and Applications, 2016, 52 (23): 50-54.)

[34] 刘卫锋，何霞．毕达哥拉斯犹豫模糊集 [J]．模糊系统与数学, 2016, 30 (4): 107-115. (Liu Weifeng, He Xia. Pythagorean hesitant fuzzy set [J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2016, 30 (4): 107-115.)

[35] Torra V. Hesitant fuzzy sets [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2010, 25 (6): 529-539.

[36] Liang Decui, Xu Zeshui. The new extension of TOPSIS method for multiple criteria decision making with hesitant Pythagorean fuzzy sets [J]. Applied Soft Computing, 2017, 60: 167-179.

[37] 刘卫锋，何霞，常娟．毕达哥拉斯犹豫模糊集的相关测度 [J]．控制与决策, 2019, 34 (5): 1018-1024. (Liu Weifeng, He Xia, Chang Juan. Correlation measures of Pythagorean hesitant fuzzy set [J]. Control and Decision, 2019, 34 (5): 1018-1024.)

[38] Ma Zhenming, Xu Zeshui. Symmetric Pythagorean fuzzy weighted geometric/averaging operators and their application in multicriteria decision making problems [J]. International Journal of Intelligent

Systems, 2016, 31 (12): 1198-1219.

[39] Liang Decui, Xu Zeshui, Darko A P. Projection model for fusing the information in Pythagorean fuzzy multi-criteria group decision making based on geometric Bonferroni mean [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2017, 32 (9): 966-987.

[40] Xue Wenting, Xu Zeshui, Zhang Xiaolu, *et al*. Pythagorean fuzzy LINMAP method based on the entropy theory for railway project investment decision making [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2018, 33 (1): 93-125.

[41] Ren Peijia, Xu Zeshui, Gou Xunjie. Pythagorean fuzzy TODIM approach to multi-criteria decision making [J]. Applied Soft Computing, 2016, 42: 246-259.

[42] Wan Shuiping, Jin Zhen, Dong Jiuying. Pythagorean fuzzy mathematical programming method for multi-attribute group decision making with Pythagorean fuzzy truth degrees [J]. Knowledge and Information Systems, 2018, 55 (2): 437-466.

[43] Xu Zeshui. An overview of methods for determining OWA weights [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2005, 20 (8): 843-865.